

Eigenschaften der Skalarmultiplikation

Für die Skalarmultiplikation von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt:

1. $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$
2. $r\vec{a} * \vec{b} = r(\vec{a} * \vec{b}), r \in R$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}$
4. $\vec{a} * \vec{a} \geq 0; \vec{a} * \vec{a} = 0$ nur für $\vec{a} = 0$

Beispielaufgaben:

1. Für die Vektoren \vec{u}, \vec{v} gelte $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ und $\vec{u} * \vec{v} = 0$

Berechne $(3\vec{u} + 4\vec{v}) * (7\vec{u} - 2\vec{v})$

Lösung:

$$\begin{aligned}(3\vec{u} + 4\vec{v}) * (7\vec{u} - 2\vec{v}) &= 3\vec{u} * 7\vec{u} + 3\vec{u} * (-2)\vec{v} + 4\vec{v} * 7\vec{u} + 4\vec{v} * (-2)\vec{v} \\ &= 21\vec{u}^2 - 6(\vec{u} * \vec{v}) + 28(\vec{v} * \vec{u}) - 8\vec{v}^2 \\ &= 21 * 1 - 6 * 0 + 28 * 0 - 8 * 1 \\ &= 13\end{aligned}$$

2. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit A(-4/8), B(5/-4) und C(7/10)

Bestimme den Fußpunkt F der Höhe hc.

Setze $\overline{AF} = r * \overline{AB}$ und bestimme r so, dass $\overline{FC} = \overline{AC} - r * \overline{AB}$ orthogonal zu \overline{AB} ist.

Lösung:

$$\overline{AC} = \begin{pmatrix} 7 & -(-4) \\ 10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\overline{FC} = \overline{AC} - r * \overline{AB} \text{ orthogonal zu } \overline{AB}$$

$$\rightarrow (\overline{AC} - r * \overline{AB}) * \overline{AB} = 0$$

Klammerauflösen:

$$\overline{AC} * \overline{AB} - r * \overline{AB}^2$$

Einsetzen der Werte für $\overline{AC} * \overline{AB}$ und \overline{AB}^2 in die Gleichung:

$$\begin{aligned}\overline{AC} * \overline{AB} \\ &= 11 * 9 + 2 * (-12) \\ &= 75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 \\ &= 9^2 + (-12)^2 \\ &= 225\end{aligned}$$

Einsetzen der Ergebnisse in $\overline{AC} - r * \overline{AB}$:

$$75 - r * 225 = 0 \quad | + r * 225$$

$$75 = 225r \quad | : 225$$

$$\frac{1}{3} = r$$

$$\overline{AF} = r * \overline{AB}$$

$$\begin{pmatrix} x & -(-4) \\ y & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} \quad | + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F(-1/4)$$